Sesión preparatoria CO+
Combinatoria, juegos y estrategia

(Basado en unas notas de Antonio Aranda, Rafael Espínola, Juan González-Meneses y Antonio Pallares)

27 de noviembre de 2020

1 Combinatoria

La combinatoria es una herramienta que nos permite enumerar agrupaciones u ordenaciones de elementos procedentes de un conjunto.

Veamos las distintas formas de agrupar u ordenar dichos elementos.

Variaciones con repetición.

Supongamos que tenemos un conjunto de n elementos y queremos saber cuántas ordenaciones posibles existen si tomamos k elementos de dicho conjunto con repetición, es decir, que un mismo elemento puede aparecer más de una vez en una ordenación. En estas condiciones:

> Las **variaciones con repetición** de n elementos tomados de k en k son
> $$n^k.$$

Para probarlo, le asociamos a cada elemento del conjunto un número del 1 al n, así, una variación es una lista de k números donde cada uno puede tomar cualquier valor entre 1 y n, luego el número de posibilidades es

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ veces}} = n^k.$$

Ejemplo. ¿Cuántos posibles resultados pueden darse en una quiniela?

Sabemos que hay 15 casillas con tres posibles resultados en cada una de ellas: 1, X, ó 2. El número de resultados posibles en la quiniela será el número de formas que podemos tomar 3 elementos (1, X, y 2) de 15 en 15, es decir, las variaciones con repetición de 3 elementos tomados de 15 en 15. Por lo tanto, pueden darse 3^{15} resultados diferentes.

Variaciones sin repetición.

En este caso, partimos de un conjunto de n elementos y nos preguntamos cuántas ordenaciones posibles existen si tomamos k elementos de dicho conjunto sin repetición, es decir, que cada elemento puede aparecer a lo más una vez en cada ordenación. De esto se deduce que $k \leq n$. Bajo estas condiciones:

Las **variaciones sin repetición** de n elementos tomados de k en k son

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

En el caso particular de que $n = k$, el número de ordenaciones posibles se conoce como permutaciones de n elementos. Como $0! = 1$, se tiene:

Las **permutaciones** de n elementos son

$$n!$$

Veamos la prueba. Al igual que antes, asociamos un número del 1 al n a cada elemento del conjunto, por lo que las permutaciones también se reducen a una lista de k números. Pero, en este caso, el primer elemento de la lista tiene n posibilidades, el segundo tiene $n-1$ (ya que no se puede repetir el elemento anterior), el tercero tiene $n-2$, etc. Por tanto, el número de posibilidades es

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ejemplo. Se tiene un autobús con 60 asientos. Si tenemos a un grupo de 100 personas, ¿de cuántas formas distintas podemos sentar a 60 de esas 100 personas?

En esta ocasión se considera un conjunto de 100 elementos y queremos contar las ordenaciones posibles si tomamos 60 elementos del conjunto. Por lo tanto, el número de ordenaciones que pueden darse es

$$\frac{100!}{(100-60)!} = \frac{100!}{40!} =$$

$$= 1143822371759508459120242691295050825518773784543526957703674779808830432287699099787008797573120000000000000000$$

Permutaciones con repetición.

En este caso, el concepto de repetición no es el mismo que en los casos anteriores. Ahora tenemos un conjunto de n elementos donde hay algunos que están repetidos, y queremos contar de cuántas formas posibles podemos ordenarlos. Estas ordenaciones se llaman permutaciones con repetición. Supongamos que un elemento se repite k_1 veces, otro se repite k_2 veces,..., así hasta el último que se repite k_m veces (observemos que $k_1 + \cdots + k_m = n$).

Las **permutaciones con repetición** de un conjunto con n elementos, que se repiten $k_1, k_2, \ldots, k_m$ veces es:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

Esta prueba también es sencilla, pues una permutación con repetición es simplemente una permutación de n elementos (luego en principio hay $n!$ posibilidades), sólo que hay posibilidades que están repetidas. A partir de una permutación dada, si permutamos de cualquier manera los k_1 elementos que son iguales, o los k_2 elementos que son iguales, o los k_3 elementos que son iguales, etc., obtenemos la misma ordenación. Por lo tanto, el número de posibilidades, $n!$, hay que dividirlo por $k_1!k_2!\cdots k_m!$, es decir, el número de posibilidades se reduce a

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

Ejemplo. Disponemos de 10 bolas: tres de color negro, tres de color blanco, tres de color azul y una de color rojo. ¿De cuántas formas distintas se pueden alinear?

Las bolas forman un conjunto de 10 elementos donde un elemento se repite 3 veces, otro elemento se repite 3 veces, otro también se repite 3 veces y otro sólo se repite una vez. El número de ordenaciones posibles será el número de permutaciones con repetición de dichos elementos, es decir:

$$\frac{10!}{3!3!3!1!} = \frac{10!}{3!3!3!} = 16.800.$$

Hasta ahora hemos visto formas de contar distintas ordenaciones, es decir que se ha tenido en cuenta el orden de selección de los elementos del conjunto. A partir de ahora vamos a ver conceptos en los que no interviene el orden de selección de dichos elementos, por ello, hablaremos de agrupaciones.

Combinaciones sin repetición.

Se parte de un conjunto de n elementos y queremos saber cuántas agrupaciones distintas existen si tomamos k elementos de dicho conjunto. A estas agrupaciones se las llama combinaciones de n elementos tomados de k en k:

El número de **combinaciones** de n elementos tomados de k en k es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Para probarlo, volvemos a suponer que tenemos listas de k números comprendidos entre 1 y n. De esta manera, una combinación sin repetición no es más que una permutación $\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)$ en la que no importa el orden en que tomemos los elementos. Por lo que dos listas que tengan los mismos k números se consideran iguales. Por tanto, hay que dividir por $k!$. En definitiva, el número de posibilidades es

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Ejemplo. De una baraja de 40 cartas, ¿cuántas agrupaciones de 7 cartas pueden obtenerse?

En este ejemplo no importa en qué orden se extraigan las cartas de la baraja. El número de agrupaciones posibles es el número de combinaciones de 40 elementos tomados de 7 en 7, es decir

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{33!\,7!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 18.643.560.$$

Algunas fórmulas útiles de combinaciones sin repetición.

Sean $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Se tiene:

- $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\quad\cdots\quad 1}$. ($k$ factores arriba y k factores abajo).
- $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \cdot \binom{n-j}{k-i}$ para todo $j \leq n$. En particular, para $j = 1$ se tiene:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Esto da lugar a la famosa pirámide de Tartaglia:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}$$

En esta pirámide, si contamos la fila superior como la fila 0, y contamos los elementos de cada fila empezando por 0, entonces el elemento k de la fila n es precisamente $\binom{n}{k}$. Se observa que la simetría de esta pirámide nos dice que

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

lo que por otra parte es trivial a partir de la definición.

Observemos que los elementos de la fila n de la pirámide de Tartaglia, es decir, $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, son los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Si consideramos el caso particular $a = b = 1$, se tiene:

- $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.

Esto también se puede deducir a partir de la pirámide, ya que, por construcción, cada fila suma el doble que la anterior.

2 Calcular una probabilidad.

Supongamos que tenemos un experimento aleatorio. A cada posible resultado del experimento se le llama suceso.

> Si tenemos un experimento de n resultados posibles y equiprobables, la **probabilidad** de que ocurra un suceso específico es
>
> $$\frac{C_F}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}.$$

Ejemplo. ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar un dado, el número obtenido sea par?

El número de resultados posibles es 6, y todos tienen la misma probabilidad. El suceso que nos interesa es $A =$ *"el resultado obtenido es par"*, y hay tres casos en los que el resultado del dado es par, por lo tanto la probabilidad del suceso A es

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Problema: En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?

3 Principio del palomar

El principio del palomar nos dice que si tenemos tres caramelos y los queremos guardar en dos cajones, al menos en un cajón meteremos dos caramelos. Formalmente se enuncia así:

Principio del palomar: Dados n objetos y $n-1$ lugares donde colocarlos, en alguno de los lugares debe haber al menos dos objetos.

Hay que tener cuidado porque no se dice nada acerca de cómo están distribuidos.

Por otra parte, supongamos que tenemos siete lápices y tres estuches. Entonces podemos asegurar que al menos en un estuche hay tres lápices. Vamos a demostrarlo. Supongamos que en cada estuche hay como mucho 2 lápices. Entonces en los tres estuches habrá como mucho 6 lápices, lo cual es una contradicción.

Formalmente, el principio del palomar se puede extender a:

Principio del palomar: Dados n objetos y k lugares donde colocarlos, en alguno de los lugares debe haber al menos $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ objetos.

Recordemos que $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ el entero inmediatamente superior a n/k.

Problema: Suponiendo que una persona no puede tener más de 500.000 pelos en la cabeza, y sabiendo que en Sevilla hay más de 700.000 habitantes, demostrar que hay al menos dos sevillanos con el mismo número de pelos.

Problema: Dados 5 puntos en un cuadrado de lado unidad. Demostrar que hay al menos 2 que distan como máximo $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.

Solución: Dividamos el cuadrado de lado 1 en cuatro cuadrados de lado 1/2. Por el principio del palomar, debe haber dos puntos en alguno de estos cuadrados más pequeños. Como este cuadrado está contenido en una circunferencia de diámetro $\frac{\sqrt{2}}{2}$, los dos puntos estarán como mucho a esta distancia.

4 Principio del extremo

Principio del extremo: *Para probar un enunciado, basta con comprobar que éste se cumple en el caso más desfavorable posible*

Al usar este principio hay que tener cuidado: hay que **probar** que la situación es la más desfavorable, y eso no siempre es sencillo. No basta decir: "como aquí se cumple y parece que es la situación más desfavorable, es verdad". La parte difícil es probar que realmente es la peor situación posible.

Problema: Decimos que tres números naturales distintos forman una terna aditiva si la suma de los dos primeros de ellos es igual al tercero. Hallar, razonadamente, el máximo número de ternas aditivas que puede haber en un conjunto dado de 20 números naturales.

5 Búsqueda de invariantes

Búsqueda de invariantes: *Cuando haya un proceso iterativo o repetitivo, busca la propiedad que no cambia, y todas las posiciones posibles tendrán que tener dicha propiedad igual que en el estado inicial.*

Ilustraremos este principio con un problema.

Problema: En una mesa hay dos cajas de galletas, una con 17 galletas y otra con 16. Dos jugadores juegan por turnos y cada jugador, en su turno, puede optar por hacer una de las siguientes cosas:

1. Comerse dos galletas de una misma caja.
2. Pasar una galleta de la segunda caja a la primera.

Pierde el jugador que no pueda hacer ningún movimiento. ¿Qué jugador gana?

Solución: Después de jugar varias veces se puede comprobar que siempre gana el segundo. ¿Por qué? Es fácil ver que en cada movimiento, la diferencia de galletas entre la caja 1 y la caja 2 varía en +2 ó -2 unidades. Por tanto, después de dos jugadas consecutivas, la diferencia entre las cajas puede variar en +4, 0 ó -4 unidades. Como al pincipio del juego esta diferencia vale 1, se deduce que cada vez que vaya a jugar el jugador 1, la diferencia entre las cajas dará resto 1 al dividirlo entre 4. Y cada vez que vaya a jugar el jugador 2, la diferencia entre las cajas dará resto 3 al dividirla entre 4.

Por tanto, cuando juegue el jugador 2, o bien hay galletas en la segunda caja (y puede pasar una a la primera), o bien hay al menos 3 galletas en la primera caja (y puede coger 2). Esto implica que el jugador 2 nunca puede perder.